

# 異なるスケールの連続的・離散的な空間的異質性の検出

彭 湛\*・井上 亮\*\*

## Extract multiscale continuous and discrete spatial heterogeneity

Zhan PENG\*, Ryo INOUE\*\*

**Abstract:** Two types of spatial heterogeneity may exist simultaneously: heterogeneity that varies continuously in the whole space and discrete heterogeneity that occurs only in specific spatial units. In addition, each could act at multiple spatial scales. To simultaneously detect both continuous and discrete spatial heterogeneity at different scales, this study proposes a novel approach by combining the Random effects eigenvector spatially filtering-based spatially varying coefficient model and Generalized lasso. This study also develops a restricted maximum likelihood estimation-based two-step algorithm for the parameter estimation. Results of the simulation experiment and the empirical application to the rental price data suggest that the proposed model could identify multiscale continuous and discrete spatial heterogeneity and outperforms previous approaches.

**Keywords:** 空間的異質性 (spatial heterogeneity), 空間スケール (spatial scale), 空間可変係数 (spatially varying coefficients), 固有ベクトル空間フィルタリング (eigenvector spatial filtering), Generalized lasso

### 1. はじめに

空間的異質性とは、生成過程が場所によって異なることを表す空間データの一般的な性質の一つである (Goodchild, 2004). 通常最小二乗法や空間相関構造のみを捉える手法 (例えば、空間的自己回帰モデル) は、データ全体の“平均的な傾向”しか分析できないため、共通の傾向から乖離した局所的な特徴を見落とす可能性がある。それに対し、空間的異質性を分析するローカルモデルは地域ごとに推定を行い、地理空間現象の地域差を解明することで、各地域の特徴に応じた効果的な政策決定に根拠を提供するのに有用である。

分析対象とする空間的異質性の構造により、ローカルモデルは2つに分類される。一つ目は、空間的

可変係数 (Spatially varying coefficients, SVC) モデルと呼ばれる、説明変数と被説明変数との関係が空間全域で変動する連続的な空間的異質性を捉える手法である。地理的加重回帰モデル (Geographically weighted regression, GWR) (Brunsdon et al., 1998; Fotheringham et al., 1998, 2002; LeSage, 2004) や Bayesian SVC モデル (Gelfand et al. 2003), Eigenvector spatial filtering-based SVC (ESF-SVC) モデル (Griffith, 2008) がその代表である。二つ目は、事前に分割した空間単位毎に回帰や検定を行い、特定の空間単位のみで発生し、その境界で不連続に変化する離散的な空間的異質性を捉える手法である。例えば、空間レジームモデル (Anselin, 1988) や空間スキャン統計 (Kulldorff and Nagarwalla, 1995), ス

---

\* 学生会員 東北大学 大学院情報科学研究科 (Tohoku University)

〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 E-mail : peng.zhan.p3.@dc.tohoku.ac.jp

\*\* 正会員 東北大学大学院情報科学研究科 (Tohoku University)

パースモデリングに基づく分析などが提案された。

上記の手法は、連続的あるいは離散的な空間的異質性のみがあると想定しているが、実際の空間事象は様々な要因の複雑な交絡によって形成され、二種類の空間的異質性を同時に持つ可能性がある。例えば、不動産価格は、各価格形成要因との関係が空間上で連続的に変動していると同時に、有名な小学校区に立地する住宅の価格は周辺地域よりも著しく高く、その境界線で不連続に価格が変化しているとされる。この場合、単一種類の空間的異質性のみを仮定したモデルは、偏りのある推定結果に基づき地域特徴の解釈を誤る可能性がある。二種類の空間的異質性を同時に検出するために、ESF-SVC とスパースモデリング手法の 1 つである Generalized lasso (GL) (Tibshirani and Taylor, 2011) を融合した ESF-GL-SVC モデルが提案された (Inoue and Den, 2022)。

しかし、ESF-GL-SVC モデルは空間的異質性が異なるスケールを持つ可能性を十分に考慮できていない。連続的な空間的異質性を表す係数には、大域的に徐々に変化する係数と、局所的に急激に変化する係数がある。また、離散的な空間的異質性も、空間スケールが異なる複数の空間分割単位で発生する可能性がある。地域特徴をより正確かつ現実的に把握するため、複数の空間スケールで生じている空間的異質性を同時に検出するモデルが必要である。GL は、事前に設定した空間分割単位に基づいた分析を行うが、同じ係数を共有する一連の空間単位を検出できるため、異なるスケールの離散的な空間的異質性を把握できる手法である。しかし、ESF-SVC では局所的な空間変動を表現することが難しく、連続的な空間的異質性の全てのスケールを完全に把握できない問題がある (Peng and Inoue, 2022)。

そこで本研究は、連続的・離散的な空間的異質性を同時に考慮するのみならず、それらの異なるスケールを正しく検出する分析手法を構築することを目的とする。この目標を達成するために、連続的な空間的異質性に関して大域的から局所的まで異なるスケールの構造を考慮可能な Random effects ESF-

SVC (RE-ESF-SVC) (Murakami et al., 2017) モデルを採用し、GL と組み合わせた新たなモデルを提案する。RE-ESF-SVC は各係数の空間的異質性のスケールは、パラメータとしてそれぞれ推定されるため、ESF-SVC の課題を克服する。ただし、この提案モデルは、罰則付き目的関数を有する線形混合モデルであるため、従来の推定手法が適用できない。そこで、本研究では制限付き最尤法に基づく 2 段階推定アルゴリズムを開発する。提案手法の性能は、シミュレーションデータと実データを用い、既往手法との比較を通して評価する。

以降、第 2 章で既往のローカルモデルを紹介し、第 3 章で提案した融合モデルとその推定方法を示す。第 4 章ではシミュレーション実験で、第 5 章では実データ分析で、提案モデルの性能を考察する。最後に、第 6 章において本研究の結論を示す。

## 2. ローカルモデル

### 2.1. GWR と MGWR

GWR は、「距離が近いほど相関が強い」という地理的第一法則に基づき、各地点に対して周辺データの影響を地点間距離に応じた重みとして設定し、SVC の値を地点ごとに繰り返して推定する手法である。GWR は地点  $i$  の説明変数  $x_{ik}$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) と被説明変数  $y_i$  が式 (1) に従うことを仮定する：

$$y_i = \beta_{i0} + \sum_{k=1}^K \beta_{\omega_{ijk}} x_{ik} + \varepsilon_i \quad (1)$$

$\beta_{i0}$  は切片、 $\beta_{\omega_{ijk}}$  が係数、 $\varepsilon_i$  は誤差。地点  $i$  を中心とした一定範囲 (バンド幅  $b_i$ ) 内における地点  $j$  の重み  $\omega_{ij}$  を用い、式 (2) に従って重み付き最小二乗法で可変係数  $\beta_{ik}$  が地点  $i$  での推定値  $\hat{\beta}_{ik}$  を求める：

$$\hat{\beta}_{\omega_{ijk}} = \operatorname{argmin}_{\beta_{ik}} \sum_j \left( y_i - \beta_{i0} - \sum_{k=1}^K \beta_{\omega_{ijk}} x_{ik} \right)^2 \omega_{ij} \quad (2)$$

重み  $\omega_{ij}$  は Exponential や Gaussian, Bi-square, Box-car 型などのカーネル関数で定義される。バンド幅  $b_i$  は交差検証または AICc で決められる。

GWR で複数の係数の空間的異質性を推定する場合、スケールを決めるバンド幅はすべての係数に対

して共通で、異なるスケールに対応できない。この課題に対し、Fotheringham et al. (2017) は各係数に対して異なるバンド幅を付与する式 (3) の Multiscale GWR (MGWR) を提案した。

$$y_i = \beta_{i0} + \sum_{k=1}^K \beta_{\omega_{ij}b_k} x_{ik} + \varepsilon_i \quad (3)$$

$b_k$  は  $k$  番目の回帰係数  $\beta_{\omega_{ij}b_k}$  のバンド幅である。

## 2.2. ESF-SVC と RE-ESF-SVC モデル

ESF (Griffith, 1996) は、空間相関を検定する Moran's I 統計量 ( $MC$ ) に基づいた空間フィルタリングのアプローチである。  $N$  地点で得られた観測値ベクトル  $\mathbf{y}$  の  $MC$  は式 (4) で定式化できる。

$$MC(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{MCM}\mathbf{y}}{\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{y}} \quad (4)$$

$\mathbf{C}$  は  $N \times N$  の空間重み行列、  $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{1}\mathbf{1}'/N$  は  $N \times N$  の centering matrix、  $\mathbf{I}$  は  $N \times N$  の単位行列、  $\mathbf{1}$  は要素が 1 の  $N \times 1$  のベクトルである。中心化された空間重み行列  $\mathbf{MCM}$  を式 (5) に従って分解する。

$$\mathbf{MCM} = \mathbf{E}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_n' \quad (5)$$

$\mathbf{E}_n = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N]$  は固有ベクトルの  $N \times N$  の行列、  $\mathbf{\Lambda}$  は対角要素が固有値  $[\lambda_1, \dots, \lambda_N]$  の  $N \times N$  の対角行列である。  $\mathbf{e}_l$  は  $\mathbf{C}$  の有する空間相関構造を表し、  $\lambda_l$  は空間的相関のスケールを表す (Griffith, 2003)。

更に、Griffith (2008) は、固有ベクトルを回帰係数に導入し、係数が有する連続的な空間的異質性を表現できる ESF-SVC を提案した。

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \circ \boldsymbol{\beta}_k^{ESF} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\beta}_k^{ESF} = \beta_k \mathbf{1} + \mathbf{E}\boldsymbol{\gamma}_k$$

$\mathbf{y}$  は被説明変数の  $N \times 1$  のベクトル、 " $\circ$ " は要素ごとの積、  $\boldsymbol{\beta}_k^{ESF}$  は  $k$  番目の空間可変係数ベクトル、定数  $\beta_k$  と固有ベクトルの線形結合  $\mathbf{E}\boldsymbol{\gamma}_k$  が  $\boldsymbol{\beta}_k^{ESF}$  の平均値と空間的変動を表す。過剰適合を避けるため Griffith and Chun (2014) により、  $\lambda_l/\lambda_{max} > 0.25$  を満たす固有ベクトルのみを保留し、更にステップワイズ法で選択した有意に正の空間相関を示す固有ベクトルを回帰式に導入する。しかし、この選択が局所的な特徴を表す固有ベクトルを排除するため、

ESF-SVC は実際に局所的なスケールで変動する係数を正しく推定できない (Peng and Inoue, 2022)。

この課題に対し、Murakami and Griffith (2017) は  $\mathbf{E}\boldsymbol{\gamma}_k$  を変量効果と仮定し、より柔軟に係数のスケールを推定できる RE-ESF-SVC (式 (7)) に拡張した。

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \circ \boldsymbol{\beta}_k^{R-ESF} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

$$\boldsymbol{\beta}_k^{R-ESF} = \beta_k \mathbf{1} + \mathbf{E}\boldsymbol{\gamma}_k, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k \sim N(\mathbf{0}_L, \sigma_k^2 \mathbf{\Lambda}(\alpha_k))$$

Murakami and Griffith (2019) を用いて  $\mathbf{E}$  を近似計算で得られた  $L$  ( $L < N$ ) 個の固有ベクトルで表し、  $\boldsymbol{\gamma}_k$  は平均 0 の確率変数、  $\mathbf{0}_L$  はすべての要素が 0 の  $L \times 1$  のベクトル、  $\mathbf{\Lambda}(\alpha_k)$  は  $L \times L$  の対角行列であり、  $l$  番目 ( $l = 1, \dots, L$ ) の対角要素が  $\lambda_l(\alpha_k) = (\sum_l \lambda_l / \sum_l \lambda_l^{\alpha_k}) \lambda_l^{\alpha_k}$ 、  $\lambda_l$  は  $l$  番目の固有値である。

なお、パラメータ  $\alpha_k$  は  $\boldsymbol{\beta}_k^{R-ESF}$  の空間スケールを制御する。具体的には、大きな  $\alpha_k$  が固有値の大きい (大域的なスケール) 固有ベクトルの影響を強くし、固有値の小さい (局所的なスケール) 固有ベクトルの影響を 0 に縮小する。したがって、  $\boldsymbol{\beta}_k^{R-ESF}$  のより大域的な変動を推定する。逆に、小さい  $\alpha_k$  を有する  $\boldsymbol{\beta}_k^{R-ESF}$  が局所的なパターンを示す。RE-ESF-SVC は  $\alpha_k$  の推定を通して、固有ベクトルの効果を調整し、様々なスケールを柔軟に把握できる。

## 2.3. GL

GL は、隣接する変数の係数間の差に着目し、大きな差が生じる変化点を検出できる (式 (8))。

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmin}} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda \sum_{(m,n) \in F} |\beta_m - \beta_n| + \delta \lambda \|\boldsymbol{\beta}\|_1 \right] \quad (8)$$

第 2 項は隣接関係の集合  $F$  に属する係数  $\beta_m, \beta_n$  ( $(m, n) \in F$ ) の差に対する  $l_1$  正則化項、第 3 項はパラメータ自体に対する  $l_1$  正則化項である。なお  $\lambda, \delta$  は正則化の強さを定めるハイパーパラメータである。離散的な変化を抽出するため、事前に分割した小地域をダミー変数として回帰式に導入し、隣接地域の係数差に  $l_1$  正則化項を加えた推定を行うことで、異質な小地域が非 0 値に推定して検出される。

## 2.4. ESF-GL-SVC モデル

ESF-SVC と GL を融合した ESF-GL-SVC は

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \circ \boldsymbol{\beta}_k^{con} + \mathbf{X}^{dis} \boldsymbol{\beta}^{dis} + \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\beta}_k^{con} &= \beta_k \mathbf{1} + \mathbf{E} \boldsymbol{\gamma}_k, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &\sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (9)$$

で定式化される。連続的な空間的異質性を、固有ベクトルを導入した回帰係数  $\boldsymbol{\beta}_k^{con}$  で表現し、離散的な空間的異質性を、分割した小地域のダミー変数  $\mathbf{X}^{dis}$  の係数  $\boldsymbol{\beta}^{dis}$  で表現する。なお、ダミー行列から 1 列を除外する必要があるため、 $M$  個の小地域の場合、 $\mathbf{X}^{dis}$  は  $N \times (M - 1)$  の行列となる。ESF-GL-SVC の係数は式 (10) で推定する。

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_k^{con}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{dis}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_k) &= \\ \underset{\boldsymbol{\beta}_k^{con}, \boldsymbol{\beta}^{dis}, \boldsymbol{\gamma}_k}{\operatorname{argmin}} &\left[ \left( \mathbf{y} - \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \circ \boldsymbol{\beta}_k^{con} + \mathbf{X}^{dis} \boldsymbol{\beta}^{dis} \right)^2 \right. \\ &+ \lambda \sum_{(m,n) \in F} |\beta_m^{dis} - \beta_n^{dis}| \\ &\left. + \delta_1 \lambda \|\boldsymbol{\beta}^{dis}\|_1 + \delta_2 \lambda \|\boldsymbol{\gamma}_k\|_1 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

第 2・3 項は隣接する小地域の係数の差と係数自体、第 4 項は固有ベクトルに対する  $l_1$  正則化項で、 $\lambda$  と  $\delta_1, \delta_2$  はハイパーパラメータである。

## 3. 提案手法

### 3.1. RESF-GL-SVC モデル

本研究は、異なるスケールの連続的・離散的な空間的異質性を抽出するため、RE-ESF-SVC と GL を組み合わせた RESF-GL-SVC モデルを提案する。式 (11) は、固定効果  $\mathbf{X}^{all} \boldsymbol{\beta}^{all}$  と変量効果  $\tilde{\mathbf{E}} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  の両方を有する線形混合モデルである。

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{X}^{all} \boldsymbol{\beta}^{all} + \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \mathbf{X}^{all} \boldsymbol{\beta}^{all} &= \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \circ \beta_k + \mathbf{X}^{dis} \boldsymbol{\beta}^{dis}, \\ \tilde{\mathbf{E}} &= [\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{E}, \dots, \mathbf{x}_K \circ \mathbf{E}], \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} &= [\boldsymbol{\gamma}_1^{con}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_K^{con}]', \\ \boldsymbol{\varepsilon} &\sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (11)$$

Murakami et al. (2017) に従い  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  を  $\tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathbf{u}}$  に置き換える。

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{X}^{all} \boldsymbol{\beta}^{all} + \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}_1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}_K) \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{u}} &\sim N(\mathbf{0}_{LK}, \sigma^2 \mathbf{I}_{LK}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (12)$$

$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_K)$ ,  $\boldsymbol{\theta}_k = (\sigma_k^2 / \sigma^2, \alpha_k)$  は推定するパラメータ、 $\tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta})$  は  $k$  番目の対角要素が  $(\sigma_k / \sigma) \sqrt{\boldsymbol{\Lambda}(\alpha_k)}$  の対角行列、 $\mathbf{0}_{LK}$  は要素が 0 である  $LK \times 1$  のベクトル、 $\mathbf{I}_{LK}$  は  $LK \times LK$  の単位行列である。

### 3.2. パラメータ推定

パラメータ  $(\boldsymbol{\beta}^{all}, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$  の推定は、下式の目的関数 (式 (13)) を最小化するパラメータを求める。

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\beta}^{all}, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) &= -2 \log \text{lik}(\boldsymbol{\beta}^{all}, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) \\ &+ \lambda \sum_{(m,n) \in F} |\beta_m^{dis} - \beta_n^{dis}| \\ &+ \delta \lambda \|\boldsymbol{\beta}^{dis}\|_1 \end{aligned} \quad (13)$$

なお、GL は離散的な空間的異質性の検出を目的としており、 $\boldsymbol{\beta}^{dis}$  以外の係数には正則化項を加えない。

正則化項の導入により、式 (13) を直接最小化することは難しい。そこで、本研究では、Peng and Lu (2012) と Yu and Zhong (2021) に従い、制限付き最尤法 (Restricted maximum likelihood estimation, REML) に基づく 2 段階パラメータ推定法を構築する。具体的な推定手順を以下に示す。

#### (1) 初期段階

変量効果を考慮せずに、GL で線形回帰モデルの係数  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{all(0)}$  を推定する (式 (14))。

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{all(0)} &= \\ \underset{\boldsymbol{\beta}^{all}}{\operatorname{argmin}} &\left[ (\mathbf{y} - \mathbf{X}^{all} \boldsymbol{\beta}^{all})' (\mathbf{y} - \mathbf{X}^{all} \boldsymbol{\beta}^{all}) \right. \\ &+ \lambda \sum_{(m,n) \in F} |\beta_m^{dis} - \beta_n^{dis}| \\ &\left. + \delta \lambda \|\boldsymbol{\beta}^{dis}\|_1 \right] \end{aligned} \quad (14)$$

#### (2) 2 段階反復処理段階

まず、REML で固定効果  $\mathbf{X}^{all} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{all(0)}$  が不在変量効果モデルの係数  $\tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathbf{u}}$  を推定する。次に、再び GL で  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{all(0)} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}}^{all(1)}$  に更新する。

Step 1:  $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}^{all} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{all(0)}$  で得られる、式 (15) の変量効果モデルのパラメータを推定する。

$$\hat{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}_1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}_K) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} \sim N(\mathbf{0}_{LK}, \sigma^2 \mathbf{I}_{LK}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

REML 推定を安定化させるために、仮想な固定効果変数としてノイズ変数  $\mathbf{X}^{noise} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  を式 (15) に導入するトリックを適用する。このノイズの係数  $\boldsymbol{\beta}^{noise}$  の推定値は 0 になることが期待される。したがって、式 (15) のプロファイル制限対数尤度関数  $\loglik_R(\boldsymbol{\theta})$  は式 (16) で表される。

$$\loglik_R(\boldsymbol{\theta}) = \int \loglik(\boldsymbol{\beta}^{noise}, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) d\boldsymbol{\beta}^{noise} \quad (16)$$

$$= -\frac{1}{2} \log|\mathbf{P}| - \frac{N-K}{2} \left( \mathbf{1} + \log \left( \frac{2\pi\tilde{d}(\boldsymbol{\theta})}{N-K} \right) \right)$$

$$\tilde{d}(\boldsymbol{\theta}) = \min_{\boldsymbol{\beta}^{noise}, \tilde{\mathbf{u}}} \left\| \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{X}^{noise} \boldsymbol{\beta}^{noise} - \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{u}} \right\|^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 \quad (17)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{noise'} \mathbf{X}^{noise} & \mathbf{X}^{noise'} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) \\ \tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathbf{E}}' \mathbf{X}^{noise} & \tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathbf{E}}' \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{I}_{LK} \end{bmatrix} \quad (18)$$

データ数  $N$  に依存する行列計算の計算量を減らすため、Murakami and Griffith (2019) に従い、 $\mathbf{M}_{0,0} = \mathbf{X}^{noise'} \mathbf{X}^{noise}$ ,  $\mathbf{M}_{0,K} = \mathbf{X}^{noise'} \tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\mathbf{M}_{K,K} = \tilde{\mathbf{E}}' \tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{X}^{noise'} \hat{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{m}_K = \tilde{\mathbf{E}}' \hat{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{m}_{z,z} = \hat{\mathbf{z}}' \hat{\mathbf{z}}$  を式 (18) に代入する。  $N$  に関する計算を事前に完成させ、式 (16) を用いた最適化の計算時間を短縮できる。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{0,0} & \mathbf{M}_{0,K} \tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) \\ \tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{M}_{0,K}' & \tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{M}_{K,K} \tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{I}_{LK} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$\boldsymbol{\beta}^{noise}$  と  $\mathbf{u}$  の最良線形不偏推定量 (BLUEs), 誤差分散  $\sigma^2$  の不偏推定量はそれぞれ式 (20)(21) となる。

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{noise} \\ \hat{\tilde{\mathbf{u}}} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_0 \\ \tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{m}_K \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{X}^{all} \boldsymbol{\beta}^{all} - \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\theta})\hat{\tilde{\mathbf{u}}}\|^2}{N-K} \quad (21)$$

パラメータ推定量  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  を用い、 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\sigma}^2 (\tilde{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))^{-2}$  とすると、 $\mathbf{y}$  の分散共分散行列は次式で推定される。

$$\hat{\mathbf{V}}_y = \hat{\sigma}^2 \mathbf{I} + \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}' \quad (22)$$

Step 2:  $\hat{\mathbf{V}}_y^{-1}$  のコレスキー分解  $\hat{\mathbf{V}}_y^{-1} = \mathbf{R}'\mathbf{R}$  で得られる上三角行列  $\mathbf{R}$  を用い、被説明変数ベクトルと共変量行列を  $\mathbf{y}^R = \mathbf{R}\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{X}^{allR} = \mathbf{R}\mathbf{X}^{all}$  と変換した上で、式 (23) の GL の最適化問題を解き  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{all}$  を更新する。

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{all} = \underset{\boldsymbol{\beta}^{all}}{\operatorname{argmin}} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{y}^R - \mathbf{X}^{allR} \boldsymbol{\beta}^{all})' (\mathbf{y}^R - \mathbf{X}^{allR} \boldsymbol{\beta}^{all}) + \lambda \sum_{(m,n) \in F} |\beta_m^{dis} - \beta_n^{dis}| + \delta \lambda \|\boldsymbol{\beta}^{dis}\|_1 \right] \quad (23)$$

最後に、 $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{all}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\sigma}^2$  に収束するまで Step 1 と Step 2 を繰り返す。なお、正則化の強さを決めるハイパーパラメータ  $\lambda$  の値は BIC で決定する。スパース解によって BIC の評価にもたらす偏差を防ぐために、本研究では、GL を適用した上で、推定係数が 0 でない変数のみを用いた OLS 推定を行い、式 (24) で定義される BIC が最小になる結果を採用する。

$$\text{BIC}(\lambda) = -2\loglik(\boldsymbol{\beta}^{all}; \lambda) + df \times \log(N) \quad (24)$$

$\loglik(\boldsymbol{\beta}^{all}; \lambda)$  は対数尤度、 $df$  は  $\boldsymbol{\beta}^{all}$  の中に非ゼロに推定された係数の数、 $N$  はデータ数である。

## 4. シミュレーション実験

本章では、異なるスケールの連続的・離散的な空間的異質性を有するシミュレーションデータを生成し、RESF-GL-SVC, RE-ESF-SVC, ESF-GL-SVC, ESF-SVC, GWR, MGWR, GL で推定し、モデルの性能を評価する。ただし、計算量の問題から、本分析では Bayesian SVC モデルを使用しない。

### 4.1. シミュレーションデータの生成方法

まず、 $[0, 1] \times [0, 1]$  の正方形領域内に、一様分布  $U(0, 1)$  で座標を与えて無作為に 2,000 点を生成した。

連続的な空間的異質性を有するデータを生成するために、MCM から正の空間相関を表す固有ベクトルを抽出する。C の  $(i, j)$  番目の成分  $c_{i,j}$  を指数型の距離減衰関数 (式 (25)) で計算する。

$$c_{i,j} = \begin{cases} \exp(-d_{i,j}/r) & i \neq j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

$d_{i,j}$  は地点  $i \cdot j$  間のユークリッド距離、レンジパラメーター  $r$  は全ての地点を結ぶ最小全域木の最長距離で与えた (Dray et al., 2006; Murakami et al., 2017)。近似計算 (Murakami and Griffith, 2019) で抽出した

100 個の固有ベクトルをデータ生成及び RESF-GL-SVC と RE-ESF-SVC モデルに応用した。さらに  $\lambda_l/\lambda_{max} > 0.25$  を満たす 10 個の固有ベクトルを ESF-GL-SVC と ESF-SVC モデルに応用した。

説明変数は  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{x}_1 \sim U(0, 1)$ ,  $\mathbf{x}_2 \sim U(0, 1)$  と設定した。異なるスケールを有する係数を設定するため、式 (26) で大域的に変化する切片  $\beta_0$  や、やや大域的、局所的に変化する係数  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  を生成した。

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \mathbf{1} + \mathbf{E}\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0 \sim N(\mathbf{0}, \sigma_0^2 \Lambda(\alpha_0)) \\ \beta_1 &= \beta_1 \mathbf{1} + \mathbf{E}\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \sim N(\mathbf{0}, \sigma_1^2 \Lambda(\alpha_1)) \\ \beta_2 &= \beta_2 \mathbf{1} + \mathbf{E}\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \sim N(\mathbf{0}, \sigma_2^2 \Lambda(\alpha_2))\end{aligned}\quad (26)$$

なお、定数項  $(\beta_1, \beta_2) = (2, 2)$ 、分散パラメータ  $(\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2) = (0.01, 0.01, 0.01)$ 、スケールパラメータ  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (4, 1.5, 0.5)$  に設定した。

次に、離散的な空間的異質性を有するデータ生成の設定を記す。正方領域を  $10 \times 10$  の小地域に分割し、各地域に付与したダミー変数を  $\mathbf{X}^{dis}$  として導入した。そして 45, 46, 55, 56 番目の小地域のダミー変数の係数  $\beta^{area}$  を 1, 他を 0 と設定し、周辺地域と異なる特徴を持つ地域群を生成した。

最後、正規分布  $N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$  に従う攪乱項  $\boldsymbol{\varepsilon}$  を加え、連続的・離散的な空間的異質性が同時に存在するデータ  $\mathbf{y}$  を式 (27) で生成した。

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \circ \beta_1 + \mathbf{x}_2 \circ \beta_2 + \mathbf{X}^{dis} \beta^{dis} + \boldsymbol{\varepsilon}\quad (27)$$

#### 4.2. シミュレーション実験の結果

RESF-GL-SVC と ESF-GL-SVC, GL の正則化項のハイパーパラメータを  $(\delta^{resf}, \delta_1^{esf}, \delta_2^{esf}, \delta^{gl}) = (1, 1, 1, 10)$  と設定する。各モデルの性能は、各係数の設定値と推定値との間の RMSE (平均二乗偏差)、モデルの Adjusted  $R^2$  (自由度調整済み決定係数)、残差の Moran's I 統計量と BIC の 100 回の推定の平均値で比較する。また、各モデルで推定した係数の空間分布を比較する。

表 4.1 は各モデルの統計量を示す。他手法に比べ、RESF-GL-SVC の係数推定の RMSE と BIC が最も小さく、Adjusted  $R^2$  が最も大きく、高い汎化性能と説明力を示す。GWR の残差の Moran's I は期待値の -0.005 に最も近く、各地点で局所回帰を行う GWR は

被説明変数が有する空間相関を表現できていると考えられる。また、ESF-GL-SVC も連続的・離散的な空間的異質性を考慮できるが、特に  $\beta_1$  と  $\beta_2$  の RMSE が RESF-GL-SVC より大きい。これは、固有ベクトルの選択によって ESF-GL-SVC が局所的なスケールの空間変動を抽出する能力に欠けているためと考えられる。また、RE-ESF-SVC と MGWR の RMSE は ESF-SVC と GWR のそれよりも小さく、異なる空間スケールの空間的異質性を表現するのに有利であることが示される。

図 4.1 は、100 回目の実験における係数の生成値と各モデルの推定値の空間分布を示す。RESF-GL-SVC は、2 種類の空間的異質性を同時に抽出でき、それぞれ空間的可変係数  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  と小地域ダミー係数  $\beta^{dis}$  で表し、生成値とほぼ同様な空間分布を示す。一方、RE-ESF-SVC や ESF-SVC, GWR, MGWR の切片  $\beta_0$  の推定結果には離散的な小地域群が混在し、離散的な空間的異質性を抽出できないことを確認した。反対に GL は、 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  を場所に依存しない定数として推定し、空間的に離散的な小地域ダミー係数  $\beta^{dis}$  で連続傾向を表現しようとしている。この結果から、既存の手法は、2 種類の空間的異質性が同時に存在する構造を正しく推定できないことが確認できた。また、ESF-GL-SVC と ESF-SVC の  $\beta_1$  と  $\beta_2$  のパターンが生成値よりスムーズに推定された。前述のように、これも局所的なスケールの空間変動を抽出できないことが原因だと考える。一方、RESF-GL-SVC と RE-ESF-SVC の  $\beta_1$  と  $\beta_2$  の推定値が生成値とほぼ同様なパターンを示し、固有ベクトルを選択せずに全てのスケールを識別できる能力を確認した。以上から、提案手法は高い推定精度を持つことが確認された。

## 5. 不動産データ分析

本章では、提案手法や既往手法を用い、不動産市場の空間的異質性分析を行う。計算量とシミュレーション実験の結果を踏まえ、本分析では、提案手法、ESF-GL-SVC, GWR のみを比較する。

表 4.1 各モデルの統計量

統計量	RESF-GL-SVC	RE-ESF-SVC	ESF-GL-SVC	ESF-SVC	GWR	MGWR	GL
$\beta_0$ の RMSE	<b>0.042</b>	0.176	0.071	0.140	0.207	0.187	0.355
$\beta_1$ の RMSE	<b>0.061</b>	0.081	0.178	0.186	0.153	0.103	0.376
$\beta_2$ の RMSE	<b>0.065</b>	0.091	0.232	0.237	0.154	0.124	0.304
$\beta^{dis}$ の RMSE	<b>0.028</b>	NA	0.098	NA	NA	NA	0.321
Adjusted $R^2$	<b>0.989</b>	0.983	0.970	0.935	0.982	0.980	0.936
残差の Moran's I	0.003	0.006	0.129	0.302	<b>-0.002</b>	0.011	0.270
BIC	<b>-2754</b>	-1667	-1261	364.3	1102.6	-457	-120.3

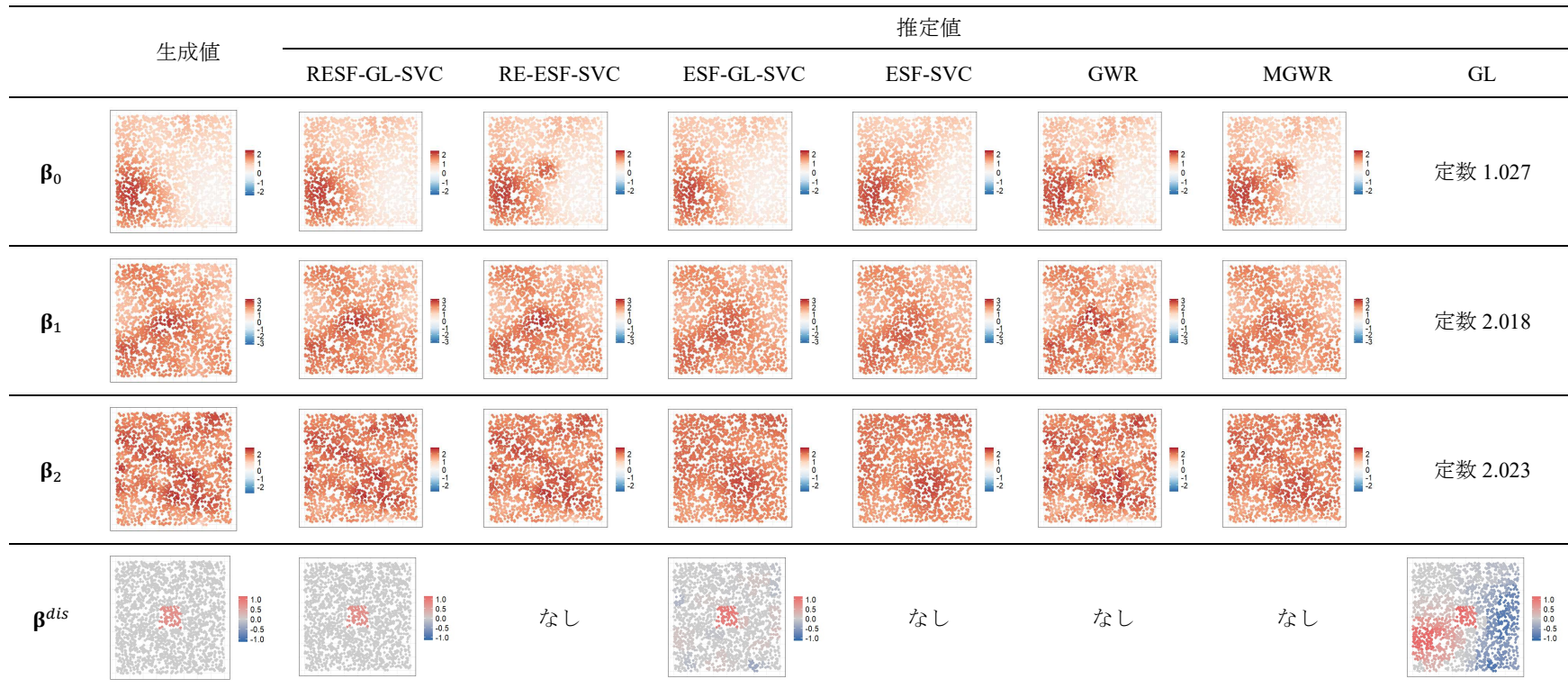


図 4.1 データ生成パターンと各モデルで推定した係数のパターン



## 5.1 研究地域と不動産データ

本分析は、アットホーム株式会社が収集した東京都の7区（千代田、中央、港、新宿、目黒、世田谷、渋谷）のマンションの募集賃料データを使用する。14階以上の高層物件と、旧耐震基準により建築された、築年が1981年以前の物件を分析の対象から外し、異常値・欠損値を除いた20,445件を分析対象とする。また、離散的な空間的異質性の分析単位を町丁目とする。RE-ESF-SVCによる残差が最小となった喜多見3丁目を町丁目ダミーの基準地域とし、物件がない地域を除いた841個の町丁目を分析に使用した。また、国土数値情報(<http://nlftp.mlit.go.jp/ksj-e/index.html>)によって提供されている町丁目ポリゴンを用い、2,114町丁目の隣接関係を設定した。図5.1に研究地域と物件の空間分布を示す。

本分析では、被説明変数を単位面積当たりの賃料の対数値、説明変数を最寄り駅までの徒歩時間、専有面積、物件の所在階層、築年数それぞれの対数値と町丁目ダミー変数とした賃料関数を定義する。なお、0である階層に1を加え、数値変数である説明変数をさらに平均0、分散1に標準化する。以上の数値変数の基本統計量を表5.1に示す。

式(25)で定義する空間重み行列に基づき100個の固有ベクトルを抽出してRESF-GL-SVCに使用し、そのうち $\lambda_i/\lambda_{max} > 0.25$ を満たす12個の固有ベクトルをESF-GL-SVCに使用した。RESF-GL-SVCとESF-GL-SVCの正則化項のハイパーパラメータを $(\delta^{resf}, \delta_1^{esf}, \delta_2^{esf}) = (1, 1, 1)$ と設定した。GWRの推定には、指数型カーネル関数を用い、交差検証でバンド幅を選択した。

## 5.2 結果と討論

RESF-GL-SVCのBICが-26539をとり、Adjusted  $R^2$ は0.659であった。残差のMoran's Iは0.005であり、有意な空間的自己相関は検出されなかった。RESF-GL-SVCの係数の推定値の基本統計量を表5.2に示す。切片と全ての係数は連続的に変化しており、それぞれのスケールは $\alpha_k$ で表されている。

図5.2にRESF-GL-SVCやESF-GL-SVC、GWRの

表 5.1 数値属性の基本統計量

変数名	平均値	最小値	最大値	標準偏差
賃料単価 (円/ $m^2$ )	3456.31	504.62	35888.50	771.61
最寄り駅までの徒歩時間 (分)	6.66	1.00	28.00	3.850
専有面積 ( $m^2$ )	35.95	10.00	445.00	25.897
所在階 (階)	3.07	1.00	14.00	2.132
築年数 (年)	19.43	1.00	35.00	9.460

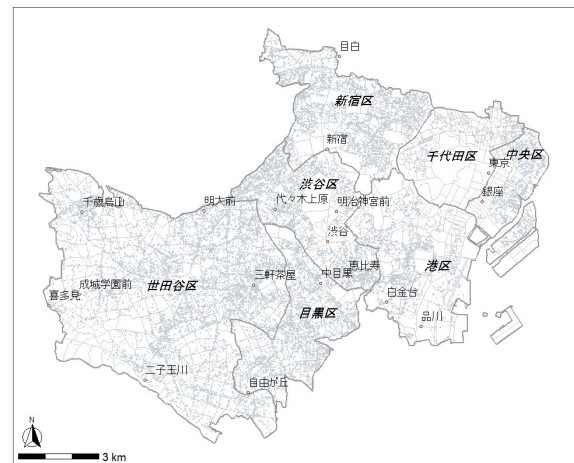


図 5.1 分析対象

数値変数の係数の空間分布を示す。各モデルとも、切片は中心部の推定値が大きい。RESF-GL-SVCで推定した最寄り駅までの徒歩時間の係数は、渋谷区と港区の境界線付近や世田谷区の西側の狭い範囲で絶対値が高く、局所的なスケール ( $\alpha_k = 0.542$ )で価格形成に重要な影響を与えることを示唆している。一方、専有面積の係数がやや局所的なスケール ( $\alpha_k = 0.715$ )で変化し、面積の増加が地価単価の上昇につながる地域もある。原因としては、高級住宅地に立地する超大型のプレミアムレジデンスは、価格評価が異なり、物件の規模が大きくなるほど単位面積の賃料も高くなる可能性があると考えられる。また、所在階は係数が大域的なパターン ( $\alpha_k = 1.034$ )を有し、推定値がスムーズに変化している。築年数の係数は適度的なスケールを有する空間的異質性を示している ( $\alpha_k = 0$ )。

一方、GWRの推定結果は、各係数の局所的な空間変動の存在を示唆しているが、 $\alpha_k$ の値から、実際には係数によってスケールが異なる可能性がある。



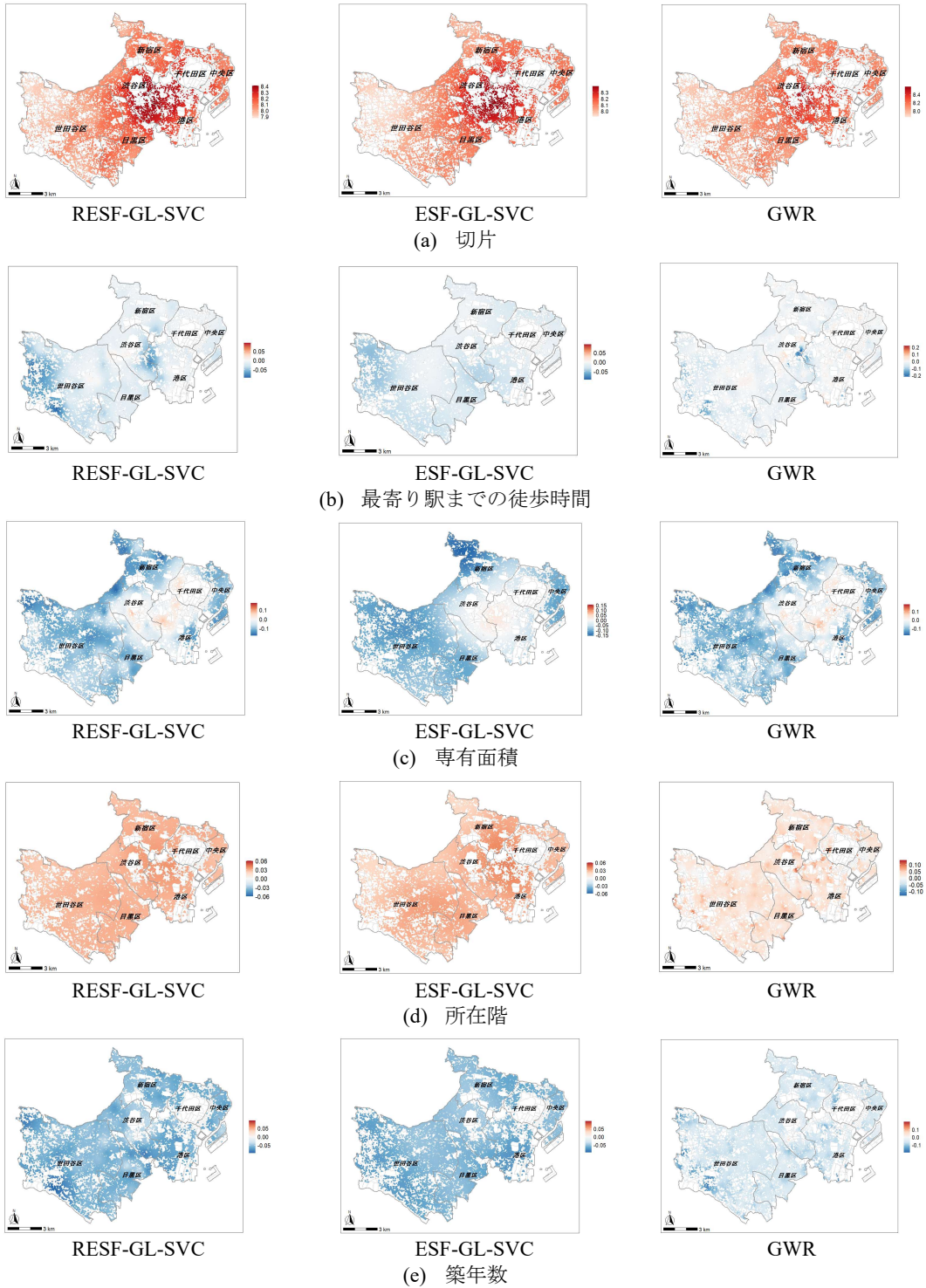


図 5.2 RESF-GL-SVC, ESF-GL-SVC, GWR の係数の空間分布

表 5.2 RESF-GL-SVC で推定した係数の基本統計量

変数名	最小値	第1四分位	中央値	第3四分位	最大値	$\sigma_k^2 \times 10^{-3}$	$\alpha_k$
切片	7.876	8.047	8.112	8.176	8.414	7.541	1.544
最寄り駅までの 徒歩時間 (分)	-0.094	-0.027	-0.016	-0.011	0.013	1.748	0.542
専有面積 ( $m^2$ )	-0.178	-0.113	-0.094	-0.067	0.083	3.965	0.715
所在階 (階)	0.025	0.028	0.030	0.031	0.036	0.363	1.034
築年数 (年)	-0.098	-0.064	-0.059	-0.054	-0.028	1.156	0.000

特に、GWR で推定した所在階の係数の分布（図 5.2 (d)）は解釈しにくい局所的なパターンを有する。原因として、大域的なスケールを持つ係数や空間変動がない係数は、局所的な範囲内での空間変動が小さいため、一定のバンド幅を用いた局所回帰に依存している GWR はその微小の変動を区別できないと考えられる。それに対し、RESF-GL-SVC と ESF-GL-SVC は全てのサンプルを考慮して推定するため、より安定した推定が可能である。しかし、図 5.2 (b)(c) に示すように、局所的なスケールを有する最寄り駅までの徒歩時間と専有面積の係数は、RESF-GL-SVC に比べ、ESF-GL-SVC のパターンはスムーズすぎ、局所的な変動が十分に抽出されていない。

また、RESF-GL-SVC で推定した町丁目ダミー係数の空間分布を図 5.3 で示す。RESF-GL-SVC は、代々木上原や明治神宮前、白金台、二子玉川、自由が丘などの駅近エリアの係数を正に推定した。これらのエリアは有名な高級住宅街として知られ、高価な住宅が集まる。一方、喜多見エリアの係数は著しく負に評価された。この地域は地勢が低く、水害危険性が高いためだと考える。以上により、RESF-GL-SVC は異なるスケールの地域群で発生する不連続な価格変動を抽出できることを確認した。

最後、表 5.3 は各モデルの統計量を示す。ESF-GL-SVC に比べ、RESF-GL-SVC の BIC が小さく、Adjusted  $R^2$  が大きく、残差の Moran's I は期待値の 0.0005 に近く、東京都 7 区の不動産市場が有する空間的異質性をより効果的に抽出できる。一方、GWR は最も高い推定性能を持つが、図 5.2 に示した GWR の係数が解釈しにくい局所的な特徴を表すことを考慮すると、RESF-GL-SVC に比べ、GWR の推定結果の説明力はより低いと考えられる。

## 6. おわりに

本研究は、RE-ESF-SVC と GL を用いて、異なるスケールを有する連続的・離散的な空間的異質性を同時に抽出するモデルを提案し、制限付き最尤法に基づく 2 段階のパラメータ推定法を構築した。提案

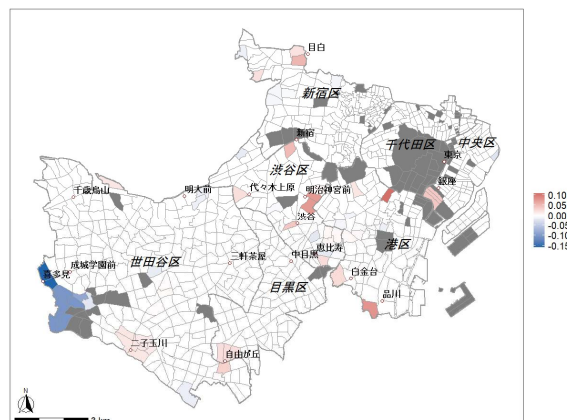


図 5.3 RESF-GL-SVC の町丁目ダミー係数の空間分布

表 5.3 各モデルの統計量

統計量	RESF-GL-SVC	ESF-GL-SVC	GWR
BIC	-26539	-25688	-31047
Adjusted $R^2$	0.659	0.614	0.688
残差の Moran's I	0.005	0.022	0.002

手法は RE-ESF-SVC モデルの可変係数で、大域的から局所的までのスケールで連続的に変化する空間構造を捉えた上で、小地域の隣接関係に  $I_1$  正則化項を加え、様々なスケールの特定の地域群で発生する不連続な空間構造を抽出できる。シミュレーション実験とマンション賃料データの分析を通して、提案手法が異なるスケールを有する 2 種類の空間的異質性が同時に抽出できるだけでなく、他手法より高い推定性能を示すことを確認した。

今後、正規分布を仮定した提案モデルを、多様な生成過程に基づく異なる構造を有するデータを分析できるように拡張すると、より多様な地域特徴を抽出できると期待される。加えて、効率的な推定方法を構築すると、大規模なデータに基づく地域分析の応用可能性を拡張する成果になると期待する。

## 謝辞

本研究は、JSPS 科研費 18H01552 および 21H01447 の助成を受けた。また、本研究は、東京大学 CSIS 共同研究 (No. 815) による成果である (利用データ: 不動産データライブラリー 戸データ 全国 2013-2017 データセット (アットホーム株式会社提供))。

## 参考文献

- Anselin, L. (1988). *Spatial Econometrics: Methods and Models* (1st edition). Springer Netherlands.
- Brunsdon, C., Fotheringham, A. S., & Charlton, M. E. (1996). Geographically weighted regression: a method for exploring spatial nonstationarity. *Geographical analysis*, **28**(4), 281-298.
- Dray, S., Legendre, P., & Peres-Neto, P. R. (2006). Spatial modelling: a comprehensive framework for principal coordinate analysis of neighbour matrices (PCNM). *Ecological modelling*, **196**(3-4), 483-493.
- Fotheringham, A. S., Charlton, M. E., & Brunsdon, C. (1998). Geographically weighted regression: A natural evolution of the expansion method for spatial data analysis. *Environment and Planning A: Economy and Space*, **30**(11), 1905-1927.
- Fotheringham, A. S., Brunsdon, C., & Charlton, M. (2002). *Geographically weighted regression: The analysis of spatially varying relationship* (1st edition). Wiley.
- Fotheringham, A. S., Yang, W., & Kang, W. (2017). Multiscale geographically weighted regression (MGWR). *Annals of the American Association of Geographers*, **107**(6), 1247-1265.
- Gelfand, A. E., Kim, H. J., Sirmans, C. F., & Banerjee, S. (2003). Spatial modeling with spatially varying coefficient processes. *Journal of the American Statistical Association*, **98**(462), 387-396.
- Goodchild, M. F. (2004). The validity and usefulness of laws in geographic information science and geography. *Annals of the Association of American Geographers*, **94**(2), 300-303.
- Griffith, D. A. (1996). Spatial autocorrelation and eigenfunctions of the geographic weights matrix accompanying geo-referenced data. *Canadian Geographer/Le Géographe canadien*, **40**(4), 351-367.
- Griffith, D. A. (2003). *Spatial Autocorrelation and Spatial Filtering: Gaining Understanding through Theory and Scientific Visualization*. Springer.
- Griffith, D. A. (2008). Spatial-filtering-based contributions to a critique of geographically weighted regression (GWR). *Environment and Planning A*, **40**(11), 2751-2769.
- Griffith, D. A. & Chun, Y. (2014). Spatial autocorrelation and eigenvector spatial filtering. *Handbook of Regional Science*, 1477-1507
- Inoue, R. & Den, K. (2022). Extraction of continuous and discrete spatial heterogeneities: Fusion model of spatially varying coefficient model and sparse modelling. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, **11**(7), 358.
- Kulldorff, M. & Nagarwalla, N. (1995). Spatial disease clusters: Detection and inference. *Statistics in Medicine*, **14**(8), 799-810.
- LeSage, J. P. (2004). A family of geographically weighted regression models. In L. Anselin, R. J. G. M. Florax, & S. J. Rey (Eds.), *Advances in Spatial Econometrics: Methodology, Tools and Applications* (pp. 241-264). Springer.
- Murakami, D., Yoshida, T., Seya, H., Griffith, D. A., & Yamagata, Y. (2017). A Moran coefficient-based mixed effects approach to investigate spatially varying relationships. *Spatial Statistics*, **19**, 68-89.
- Murakami, D. & Griffith, D. A. (2019). Spatially varying coefficient modeling for large datasets: Eliminating N from spatial regressions. *Spatial Statistics*, **30**, 39-64.
- Peng, H. & Lu, Y. (2012). Model selection in linear mixed effect models. *Journal of Multivariate Analysis*, **109**, 109-129.
- Peng, Z. & Inoue, R. (2022). Identifying multiple scales of spatial heterogeneity in housing prices based on Eigenvector spatial filtering approaches. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, **11**(5), 283.
- Tibshirani, R. J. & Taylor, J. (2011). The solution path of the generalized lasso. *The Annals of Statistics*, **39**(3), 1335-1371.
- Yu, J. & Zhong, H. (2021). Time varying mixed effects model with fused lasso regularization. *Journal of Applied Statistics*, **48**(8), 1513-1526.