

Fused LASSO を導入した空間相互作用モデルによる機能地域抽出

伊藤 翔* 井上 亮**

Extraction of Functional Regions by Spatial Interaction Model with the fused LASSO Penalty

Kakeru Ito, Ryo Inoue

In recent years, the flow of people and goods across municipal boundaries has become increasingly active, and methods for extracting functional regions where active economic activities are conducted internally have been discussed. In this study, we propose a new method for extracting functional regions by focusing on the similarity of flow characteristics between adjacent areas. First, the strength of the inter-regional relationship is expressed by the friction of distance parameter of the spatial interaction model and estimated by the model with fused LASSO. Then, based on the similarity of the flow characteristics, the analysis area is divided into several functional regions by spectral clustering. The effectiveness of the proposed method is confirmed by the analysis results of flow data in several regions.

Keywords: 機能地域 (functional region), 空間相互作用モデル (spatial interaction model), fused LASSO, スペクトラルクラスタリング (spectral clustering)

1. はじめに

近世以降の工業、商業の発展は、都市へのビジネスの集積へとつながり、都市は、その周辺地域から労働者など、人・モノをひきつけるようになっていった。また、バイパス道路、鉄道などのインフラ整備が都市周辺の交通利便性を向上させ、郊外に都市への通勤者たちが住む住宅街などが生まれてきている。このような「都市化」「郊外化」は、人々の生活行動に大きな影響を与え、通勤・通学・購買行動などにおいて、自治体境界を越えた人・モノの移動が活発化するようになった。現代において社会経済活動は市町村域にとどまらず、大きな都市を中心として、その周辺地域と結びついた大規模な地域内で行われていると考えられる。このような地域が機能地域である。交通政策や、市町村合併の範囲策定など、都市政策を効果的に行うためには、機能地域を把握することが必要不可欠である。

Sauer (1918) など、機能地域抽出手法に関する研究は 100 年以上前から行われてきたが、日本をはじめとする多くの国では未だに公式の機能地域を設定するに至っておらず、日本においては、経済産業省や、国土交通省などが、それぞれ独自の基準で都市

圏を定めている。そのため今なお機能地域抽出手法の開発は熱心な研究テーマとして残っており、これまで因子分析法 (例えば Goddard, 1970) や、クラスター分析法 (例えば市南, 1978) など様々な手法が機能地域分析へと応用され、その適用可能性が議論されている。特に近年ではネットワーク科学分野で開発されたコミュニティ抽出手法である Modularity 最大化法を応用した研究が盛んに行われている (例えば Farmer & Fotheringham, 2011; 福本・岡本, 2012)。

本研究は、同一機能地域内の隣接地域は、機能地域の中心都市やその周辺地域とのつながりが強いという共通の特徴を有しており、流動の特徴の類似性から地域のまとまりを抽出できるとの考えに基づき手法を構築する。まず、地域間流動の大きさを、空間相互作用モデルの距離抵抗パラメータを地域間ごとに設定することにより表現する。そのうえで、機能地域内の隣接する 2 地域では、各地域に対する距離抵抗パラメータが等しくなるという考えのもと、系列データの変化点抽出手法である Fused LASSO を隣接地域に関する距離抵抗パラメータに適用し、地域間流動の特徴が異なる地域境界を抽出する。最後に、隣接地域間で他地域に対する距離抵抗パラメー

* 学生会員 東北大学 大学院情報科学研究科 (Tohoku University)

〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 E-mail : kakeru.ito.s1@dc.tohoku.ac.jp

** 正会員 東北大学 大学院情報科学研究科 (Tohoku University)

タの値の差異から流動の特徴の類似度を計算し、それをもとにスペクトラルクラスタリングによって分析領域をいくつかの機能地域に分割する。また、分析対象地域・データを変えながら、同様に地域分類を行い、それぞれの結果を観察することにより、提案手法の適用可能性を考察する。

2. 提案手法

本研究は、「Fused LASSO を導入した空間相互作用モデルに基づき、地域間流動データが表す地域間関係の強さを抽出」した後、「抽出された地域間関係の強さに対するスペクトラルクラスタリングによる、機能地域抽出」を行う分析アプローチを提案する。前者を 2.1、後者を 2.2 で説明する。

2.1. Fused LASSO を導入した空間相互作用モデルによる地域間関係の強さの抽出

(1) 提案の概要

本節は、地域間毎に設定した空間相互作用モデルの距離抵抗パラメータ γ で、地域のつながりの強弱を表現することを考え、地域間流動データからそのモデルを推定する方法を提案する。距離抵抗パラメータは発地・着地間の距離の増加に対する流動量減少の程度を表し、流動量の距離通減が大きいほど、パラメータ値は大きい。これを地域間ごとに推定すると、特定の地域とはつながりが強く、それ以外の地域とは弱いという、他の地域との関係の強弱を表すことができる。

しかし、地域間毎に距離抵抗パラメータを設定した空間相互作用モデルは、データ数よりパラメータ数が多く、その推定は不良設定問題となる。そこでスパースモデリングの一手法であり、隣接地域のパラメータ値の差に L_1 正則化を与える Fused LASSO (Tibshirani et al., 2005) を導入する。具体的には隣接地域間では他地域に対する流動の特徴が類似するという考えのもと、隣接地域を発地、あるいは着地とする距離抵抗パラメータの差に L_1 正則化を導入する。この正則化により、流動量の傾向が周辺と類似する地域間の距離抵抗パラメータは同じ値に、異なる地域間に対して異なる値として、地域間ごとの距離抵抗パラメータを推定することが期待される。

(2) 空間相互作用モデル

空間相互作用モデルは、地域間の流動を、発地・着地の人口や規模、地域間の地理的近接性から表現するモデルであり、最も基本的なモデルは式(1)の重力モデルである。

$$T_{ij} = k \frac{P_i^\alpha Q_j^\beta}{d_{ij}^\gamma} \quad (1)$$

ここで、 T_{ij} は地域*i*を出発して、地域*j*に到着する人・モノの移動量、 P_i は発地側地域*i*の人口や規模、 Q_j は着地側地域*j*の人口や規模、 d_{ij} は地域*i, j*間の直線距離や所要時間といった距離抵抗、 k, α, β, γ はそれぞれパラメータを表す。対数をとったモデルで重回帰分析すると、パラメータを簡単に推定できる。

(3) Fused LASSO

スパースモデリングの基本の LASSO (Tibshirani, 1996) は、重回帰分析の残差平方和最小化問題に L_1 正則化項を導入し、多くのパラメータがゼロとなる推定値を得る方法で、過学習を防ぐことができる。推定式は以下が表される。

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^N \left(y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_i^{(j)} \right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j| \quad (2)$$

ここで、 N はサンプル数、 p は推定するパラメータ数、 β_j はパラメータ ($\beta_1, \beta_2 \dots \beta_p$)、 $y_i, x_i^{(j)}$ はそれぞれ目的変数と説明変数の値 ($y_1, y_2 \dots y_N$)、($x_1^{(j)}, x_2^{(j)} \dots x_N^{(j)}$)を表す。また、 λ は正則化の強さを表すハイパーパラメータで、大きく設定すると 0 に推定されるパラメータが多くなる。この設定は、AIC (赤池, 1973) による判断や交差検証を用いて行われる。

Fused LASSO は LASSO の拡張で、系列データの分析において、隣接するパラメータの差に対して L_1 正則化 (式 (3) 第二項) を導入する。

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^N \left(y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_i^{(j)} \right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{p-1} |\beta_{j+1} - \beta_j| + \mu \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j| \quad (3)$$

ここで λ は正則化の強さを決定するハイパーパラメータ、 μ は隣接パラメータの差に対する正則化とパラメータ自体に対する正則化の重みを決定するハイパーパラメータである。

隣接パラメータの値の差に対する正則化を通して、

パラメータが顕著に異なる変化点を抽出できる。近年、Fused LASSO を地域ごとの特徴の違いを抽出するような地理分析へ応用する研究が盛んになっており、例えば井上ら (2020) は Fused LASSO により不動産市場における地域ごとの価格形成要因の特徴を抽出した。

(4) 地域間関係強弱の抽出手法の提案

式 (1) の空間相互作用モデルについて、地域 ij 間の距離抵抗パラメータを γ_{ij} のように地域間毎に設定し、地域間関係の強弱を表す指標とする。

地域間流動の特徴を距離抵抗パラメータ γ_{ij} のみで表現するために、まず、全 OD に対して共通の距離抵抗パラメータを設定したモデルで、定数 $\ln(k)$ 、発生量パラメータ α 、集中量パラメータ β を OLS で推定し、その推定値をそれぞれ $\widehat{\ln(k)}$ 、 $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ とする。

$$\min_{\ln(k), \alpha, \beta} \sum_{i \in R, j \in R, i \neq j} \{ \ln(T_{ij}) - (\ln(k) + \alpha \ln(P_i) + \beta \ln(Q_j) - \gamma \ln(d_{ij})) \}^2 \quad (4)$$

ここで R は分析対象の地域の集合を表し、その他の文字の定義は、式(1)に準ずる。

次に、推定されたパラメータ $\widehat{\ln(k)}$ 、 $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ を固定した上で、OD 毎に異なる距離抵抗パラメータ γ_{ij} を Fused LASSO の L_1 正則化を導入した以下のモデルで推定する。

$$\min_{\gamma_{ij}} \sum_{i \in R, j \in R, i \neq j} \{ T'_{ij} - (-\gamma_{ij} \ln(d_{ij})) \}^2 + \lambda \left(\sum_{\substack{(p,q) \in C \\ p, q \neq r}} |\gamma_{pr} - \gamma_{qr}| + \sum_{\substack{(r,s) \in C \\ r, s \neq p}} |\gamma_{pr} - \gamma_{ps}| \right) \quad (5)$$

$$\text{where } T'_{ij} = \ln(T_{ij}) - (\widehat{\ln(k)} + \hat{\alpha} \ln(P_i) + \hat{\beta} \ln(Q_j))$$

ここで C は隣接地域の組み合わせの集合、 p, q, r, s は C 内の地域、 λ は隣接地域の距離抵抗パラメータの差に対する正則化の強さを決定するハイパーパラメータを表している。分析対象地域数 N に対して、内内トリップを除いた $N(N-1)$ 通りの流動データを用いられるが、流動量の対数を用いて推定するため流動量 0 の地域間は分析対象から除外する。

式 (5) のハイパーパラメータ λ は、情報量規準に基づいて決定する。しかし推定パラメータ数に対し

てデータ数が少ない場合、AIC はパラメータ数を過大に見積もるバイアスを有するため、このバイアスを解消した c-AIC (Sugiura, 1978) を導入する。

$$c - AIC = N \left(\log \left(2\pi \frac{S_e}{N} \right) + 1 \right) + \frac{2KN}{N-K-1} \quad (6)$$

ここで S_e は残差平方和、 N は分析領域内の流動が存在する二地域間数、 K はパラメータ数を表す。しかし Fused LASSO は隣接パラメータ間の差を縮小推定するバイアスを持つ。そこで、井上ら (2020) にならい、Fused LASSO で等しい値に推定されるパラメータの組み合わせを求め、その結果を基にモデルを構築して最小二乗推定を行い、c-AIC が最小となるモデルを採択する。

2.2. スペクトラルクラスタリングによる分析対象領域の分割

2.1 の提案手法で得られた地域間ごとの距離抵抗パラメータ推定結果を基にクラスタリングを行い、機能地域を抽出する。

本研究では隣接する一連の地域をまとめた地域として抽出するために、グラフ上のノードの連結性を考慮して分類するスペクトラルクラスタリング (例えば、von Luxburg, 2007) を利用する。

スペクトラルクラスタリングは、リンクで直接結ばれるノード間の類似度を与えた行列 W に基づいて分類する。 W の列和を対角成分とした次数行列 D

$$D_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^N w_{kj} & \text{s.t. } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

を用い、グラフラプリアン行列 L を式(8)で表す。

$$L = D - W \quad (8)$$

このグラフラプリアン行列 L の固有値を昇順に K 個取り出し、それに対応する固有ベクトル $V \in \mathbb{R}^{N \times K}$ について、 V の各行ベクトルをもとに k-means 法などによりグラフを K 個のクラスターに分割する。これにより、連結性を保持したまま内部で類似度の高いノード群を抽出することができる。

本研究では、行列 W の成分 w_{ij} に、隣接地域間の他地域に対する距離抵抗パラメータ値の類似度を与え、スペクトラルクラスタリングにより対象領域を機能地域に分割することを目指す。

隣接する二地域が同じ機能地域に属している場合、他地域に対する流動の特徴が類似しているため、他地域に対する距離抵抗パラメータの値の差が小さくなる。したがってその総和をとることにより、流動の類似度をすべての隣接地域間ごとに表現することができる。ただし、スペクトラルクラスタリングの隣接行列では類似度が大きいほど入力値が大きくなるため、本研究では、総和の逆数を入力する。

$$W_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{k=1}^N (|\gamma_{ik} - \gamma_{jk}| + |\gamma_{ki} - \gamma_{kj}|)} & \text{s.t. } (i, j) \in \mathcal{C} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

なお、流動が存在しないため空間相互作用モデルの推定から除外した地域間の距離抵抗パラメータは、推定された距離抵抗パラメータの最大値を用いて、式(9)の計算を行う。

3. 提案手法の適用・考察

3.1. 使用データ

平成 27 年国勢調査の従業地・通学地による人口・就業状態等集計に基づく自治体間通勤・通学データを利用して機能地域抽出を試行する。発生量・集中量を表す指標 P_i, Q_j は平成 27 年度国勢調査の人口等基本集計の市町村人口を、距離 d_{ij} は自治体の庁舎間直線距離 (km) を用いる。

3.2. 宮城県の分析

宮城県は人口 2,333,899 人 (平成 27 年国勢調査) を有し、仙台市の 5 区を含む 39 の市区町村が存在する。地域間の組み合わせは 1,482 通りあるが、そのうち 197 の地域間で通勤・通学者数が 0 のため、これらを除いた 1,285 の地域間を対象に分析する。

表-1 に式(4)(6)をもとに空間相互作用モデルのパラメータ推定値 $\ln(\bar{k}), \hat{\alpha}, \hat{\beta}$, とハイパーパラメータ λ の設定値を、図-1 に λ と c-AIC および距離抵抗パラメータ種類数の関係を示す。図-1 から、パラメータ種類数がある程度削減されたモデルが c-AIC 基準で最良となったことを確認し、宮城県の分析では $\lambda=0.3432$ のとき c-AIC は最小値 1.351×10^3 をとり、1,285 の距離抵抗パラメータが 508 種類の値に推定された。以降はこの値をもとに市町村の流動特性や

機能地域を分析する。

まず、特定の自治体に着目し、そこを発着する地域間流動の距離抵抗パラメータ推定値の空間分布から、地域の特徴を分析・考察する。図-2・3 はそれぞれ宮城県東部 (石巻市・東松島市)、南部 (白石市・角田市) を発着する距離抵抗パラメータの分布を表しており、関係が強い地域を赤、弱い地域を青で示す。なお、流動が存在しないため分析から除外した自治体は白色で表している。

図-2・3 の距離抵抗パラメータ分布は類似していないが、石巻市と東松島市、白石市と角田市の隣接地域間では、近隣市町村や県庁所在地の仙台市とのつながりが強いという共通の特徴を有することがわかる。このことから、隣接地域間では流動の特徴は類似しており、距離抵抗パラメータによりそれを表現できること確認された。

次に、スペクトラルクラスタリングによる地域分類結果を示す。推定された距離抵抗パラメータをもとに、式(7)~(9)から、グラフラフシアン L を求めた。ただし式(9)の計算時に、流動量 0 の 197 地域間には距離抵抗パラメータ推定値の最大値 3.419 を与えた。

表-1 宮城県の分析におけるパラメータ $\ln(\bar{k}), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \lambda$ 推定値

$\ln(\bar{k})$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	λ
-3.868	0.6783	0.7918	2.361	0.3432

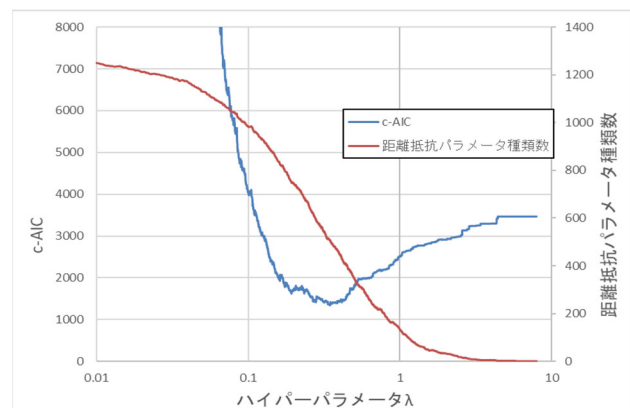
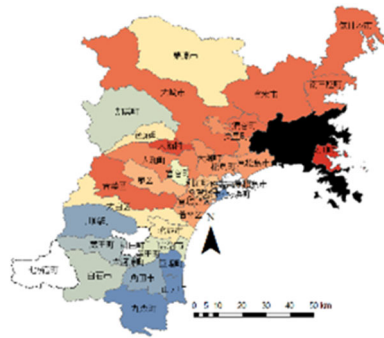
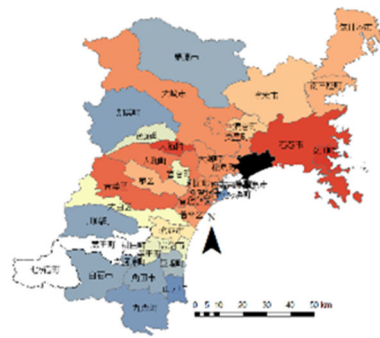


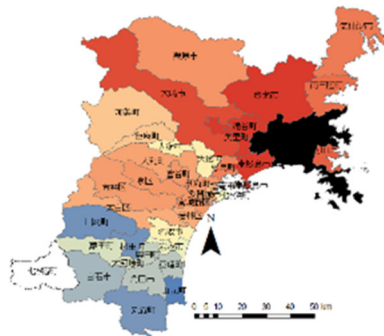
図-1 ハイパーパラメータ λ と c-AIC および距離抵抗パラメータ種類数の関係



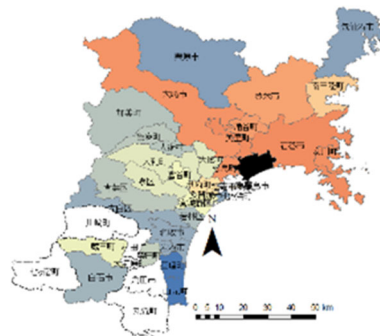
(a) 石巻市 発



(b) 東松島市 発

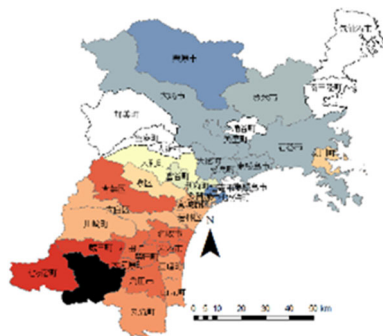


(c) 石巻市 着

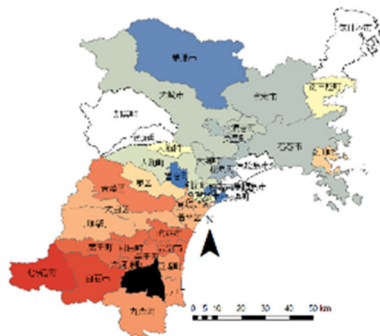


(d) 東松島市 着

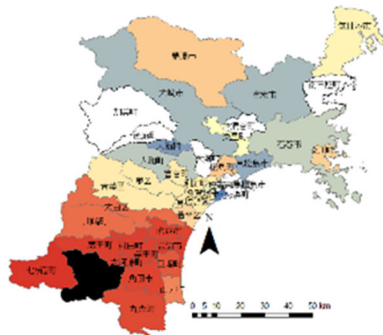
図-2 宮城県東部（石巻市，東松島市）を発着地とする距離抵抗パラメータ分布図



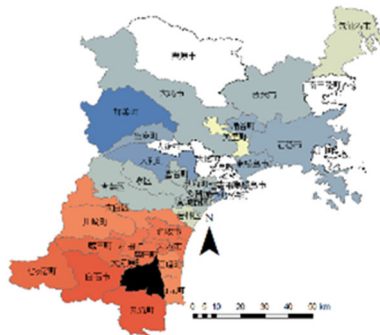
(a) 白石市 発



(b) 角田市 発

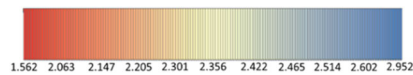


(c) 白石市 着



(d) 角田市 着

図-3 宮城県南部（白石市，角田市）を発着地とする距離抵抗パラメータ分布図



スペクトラルクラスタリングによる3・6・9分割の分類結果を図-4に示す。

3分割(図-4(a))では、北部・東部、中部、南部に分類され、飛び地もない解釈のしやすい結果を得られた。その機能地域境界は市区町村間流動の特徴を詳細にとらえており、例えば名取市と岩沼市はいずれも仙台市とのつながりが特に強い市であるが、本手法では異なる機能地域に分類されている。これは名取市が県北部からも流動が多い地域であるという点が県中部と類似しており、岩沼市は県南部との間の流動が名取市よりも多い地域であることが反映されたことによるものであると考察される。

6分割(図-4(b))では、気仙沼市と南三陸町の「気仙沼・本吉地域」、女川町と七ヶ宿町が分類された。女川町は、着地としたときの距離抵抗パラメータ値が隣接する石巻市よりも全体的に小さい値で推定されており、原子力発電所があることにより居住人口に対して通勤流入が多い実態が反映されたものと考察される。また、七ヶ宿町は町域を超えた流動が極めて少なく、分析から除外した地域間が県南部の市町村の中で突出して多いため、これらに推定パラメータの最大値3.419を代入してクラスタリングを行ったことが影響したと考えられる。

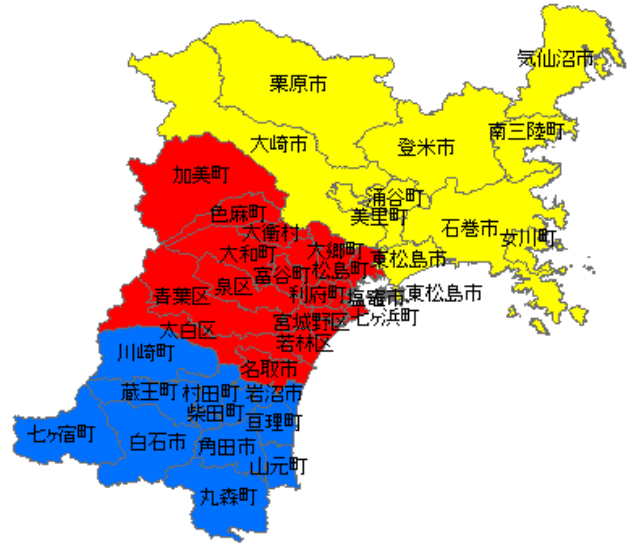
9分割(図-4(c))では、より地域間流動の特徴を詳細につかんでおり、例えば3分割の際は中部、6分割の際は北部に分類された、県北西部の加美町と色麻町が、異なる地域群として抽出されている。この二町はそれぞれ県北部、中部ともある程度つながりがあるが、町間の距離が短い二町間での流動が特に多いため、分割数を増やす中で新たに抽出された地域群であると考察される。

3.3. 様々な地域・データに対する分析

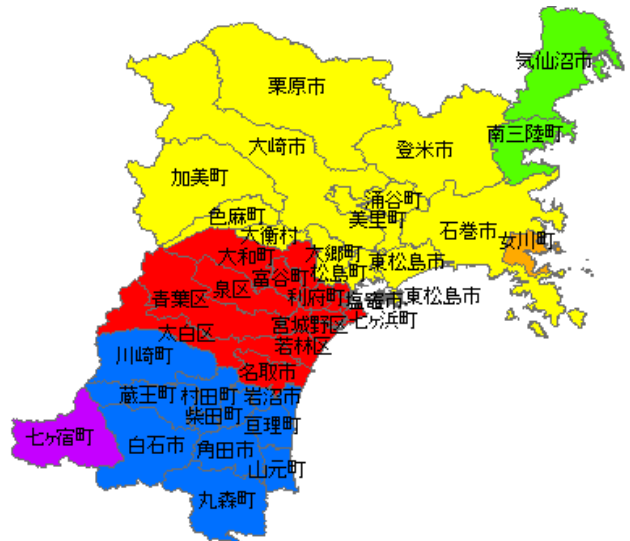
様々な領域に対して分析し、提案モデルの適用可能性を検討する。分析結果を図-5に示す。

(a) 青森県(図-5(a))

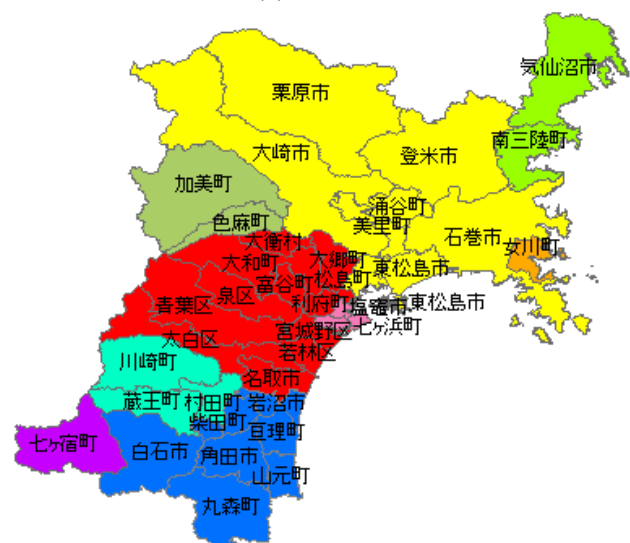
3分割すると、津軽(赤)、南部(青)、下北(黄)の3つの地域群に分類された。これら3地域群の内々流動が多いという実態に基づく地域分類ができている。



(a) 3分割



(b) 6分割



(c) 9分割

図-4 宮城県 機能地域抽出結果

(b) 新潟県 (図-5 (b))

6 分割すると、上越 (赤)、中越 (黄)、下越 (青・緑) に分かれた結果が得られた。

下越では、胎内市と新発田市の間に境界が存在しているが、下越の中で、緑の地域群内の自治体は胎内市との間の流動が多く、青の地域群内の自治体は新発田市との間の流動が多いという実態を表現したものと考えられる。

また、佐渡市、粟島浦村はそれぞれ独立地域として抽出されたが、地理的に隣接する地域間のみならず類似度を設定してスペクトラルクラスタリングを行ったため、この二地域は分割数を変化させても常に独立した地域として抽出される。

(c) 山形県 (図-5 (c))

村山 (黄)、最上 (緑)、置賜 (赤)、庄内 (青) の 4 地域に大きく分類されるが、一部の地域群で解釈が難しい結果が得られた。

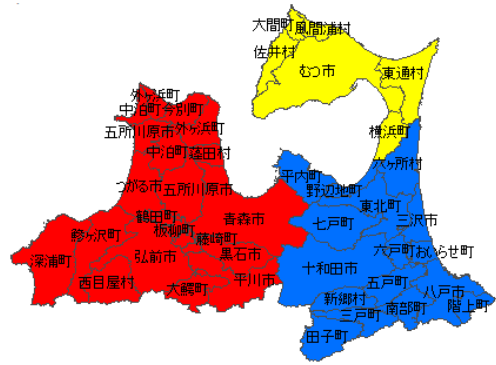
例えば、県北東部の最上町は山形市などと同じ黄色の地域に分類されたが、流動データによると、最上町は村山地方よりも新庄市をはじめとする最上地方との間で流動が多い町である。この分類結果を出力した原因は、流動量 0 のため、分析から除外した地域間の距離抵抗パラメータの値として、推定結果の最大値を式(9)に与えたことだと考えられる。

最上町を発地あるいは着地とする 68 地域対の内、主に対遠方地域の 28 対に流動が存在せず、分析から除外された。一方、最上町と隣接する新庄市は都市規模が大きいため、より遠方からも通勤通学流動を集める。流動の存在しないのは 8 地域対のみで、対遠方地域の距離抵抗パラメータ推定値も小さい場合が多い。そのため、最上町と新庄市は対遠方地域の距離抵抗パラメータ推定値の差が大きく、地域間の類似度が小さく評価されたため、異なる地域に分類されたと考えられる。

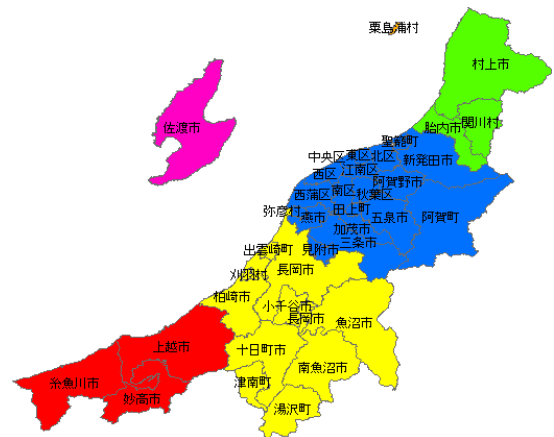
以上より、流動量が 0 のため分析から除外される地域間が多い分析領域では、直接行き来する流動量が多くても、異なる地域に分類される可能性があることが、本提案手法の課題として挙げられる。

(d) 全国 (図-5 (d))

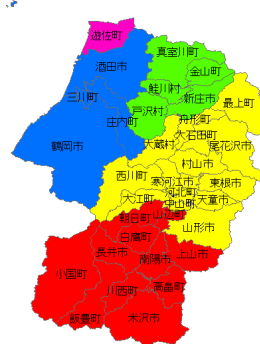
住民基本台帳人口移動報告に基づき、2019 年の 47



(a) 青森県 (3 分割)



(b) 新潟県 (6 分割)



(c) 山形県 (5 分割)



(d) 全国 (8 分割)

図-5 様々な分析領域に対する実証結果

都道府県間人口移動データを流動データとして、分析した。なお、隣接関係については陸続きでない場合でも、福岡県・山口県間のように道路もしくは鉄道によってつながっている場合は、2 県が隣接しているとみなした。

東北、関東などの地方分類とかなり類似した地域分類結果が得られたが、一部の県は異なる地域に分類される、興味深い結果となった。例えば福島県は関東地方の都県と同じ地域群に分類されているが、これは福島県が他の東北地方の県と比較して首都圏への転出者が多いという特徴を持っているためと考察される。

このように様々なデータに対して、本手法は地域間の流動の特徴をとらえており、マクロ（ミクロ）なデータに対してもクラスタリング手法として適用できることが期待される。

4. まとめ

本研究では、Fused LASSO を導入して推定した距離抵抗パラメータにより地域間流動の大小を表現し、スペクトラルクラスタリングにより分析対象領域を分割する新たな機能地域抽出手法を提案した。

実証の結果、隣接地域間での流動の特徴の類似を距離抵抗パラメータで表現できることを確認した。また、スペクトラルクラスタリングにより多くの分析領域で地域間流動の特徴を捉えた解釈のしやすい地域群を抽出することに成功した。一方で分析除外地域間がクラスタリング結果に影響を与えることが課題として考察されたのでクラスタリング手法の改良について今後検討していきたい。また、分析領域内地域数を増やすことや、航路や鉄道駅をもとに隣接の定義を変えて分析を行うことで適用可能性についての考察をさらに深めていきたい。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 18H01552 および 21H01447 の助成を受けた。

参考文献

Akaike, H. (1973) Information theory and an extension of

the maximum likelihood principle, *Proceedings of the 2nd International Symposium on Information Theory*, Petrov, B. N., and Caski, F. (eds.), Akademiai Kiado, Budapest: pp. 267–281.

Farmer, C. J. Q. and Fotheringham, A. S. (2011) Network-based functional regions. *Environment and Planning A*, Vol. 43, pp. 2723–2741.

Goddard, J. B. (1970) Functional regions within city centres: A study by factor analysis of taxi flows in central London. *Transactions of the Institute of British Geographers*, Vol. 49, pp. 161–181.

von Luxburg, U. (2007) A tutorial on spectral clustering, *Statistics and Computing*, Vol. 17, No. 4, pp. 395–416.

Sauer, C. O. (1918) Geography and the Gerrymander. *The American Political Science Review*, Vol. 12, pp. 403–426.

Sugiura, N. (1978) Further analysis of the data by Akaike's information criterion and the finite corrections. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 7, No. 1, pp. 13–26.

Tibshirani, R. (1996) Regression shrinkage and selection via the Lasso, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 58, pp. 267–288.

Tibshirani, R., Saunders, M., Rosset, S., Zhu, J., and Knight, K. (2005) Sparsity and smoothness via the fused lasso. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 67, pp. 91–108.

市南 文一 (1978) 社会・経済的地域特性と地区間通勤流動とからみた名古屋大都市圏の地域構造, 社会・経済的地域特性と地区間通勤流動とからみた名古屋大都市圏の地域構造, 地理学評論, Vol. 51, No. 7, pp. 545–563.

井上 亮, 石山 里穂子, 杉浦 綾子 (2020) 東京都区部の賃貸マンション市場の地理的分割の実態把握 — スパースモデリングによるアプローチ —, 土木学会論文集 D3, Vol. 76, pp. 251–263.

福本 潤也, 岡本 住洋 (2012) コミュニティ抽出法と空間相互作用モデルを組み合わせた機能地域区分手法の提案, 土木学会論文集 D3, Vol. 68, pp. 427–436.